

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记22——特征值和特征向量

特征向量

函数通常作用在数字上，比如函数f作用在x上，结果得到了f(x)。在线性代数中，我们将x扩展到多维，对于Ax来说，矩阵A的作用就像一个函数，输入一个向量x，通过A的作用，得到向量Ax。对多数向量x而言，经过Ax的转换后将得到不同方向的向量，但总有一些特殊的向量，它的方向和Ax方向相同，即Ax平行于x，这些特殊的向量就是特征向量。

平行的向量用方程来表示比较简单：

$$Ax = \lambda x$$

其中A是方阵， $x \neq 0$ 。 λ 是一个系数，被称为特征系数或特征值；x和 λx 平行，方程的解x就是A的特征向量。

这里需要对“方向相同”做出一些特殊的解释，它也包括正好相反的方向和无方向，所以 λ 的值可以取0或负数。

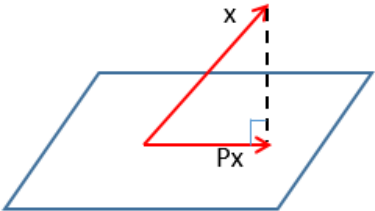
求解特征向量

现在的问题是，给定矩阵A，如果求解A的特征向量？这里没有 $Ax = b$ 这样的方程，只有 $Ax = \lambda x$ ，其中 λ 和x都是未知数，如何求解呢？在解释之前，先看看投影矩阵的特征向量。

投影矩阵的特征向量

假设有个一个平面，给定投影矩阵P，投影矩阵的特征向量有哪些？特征值又是什么？

这实际上是在回答那些向量的投影和向量本身平行，像下面这样随意投影肯定不行：



x在平面的投影是Px，二者的方向不相同，因此图中的x不是P的特征向量。

如果x正好在平面上，那么它的投影就是x本身，所以位于平面上的所有向量都是P的特征向量，此时特征值 $\lambda = 1$ ， $Px = x$ 。此外，垂直于平面的向量在平面上的投影是零向量，即 $Px = 0 = 0x$ ，这相当于特征值 $\lambda = 0$ ，所以垂直于平面的向量也是P的特征向量。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

矩阵的迹

再看一个特例：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A乘以什么样的向量将得到一个同方向的向量？即A的特征值和特征向量是什么？

很容易看出：

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A & x & & x \end{matrix}$$
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad Ax = x$$

A还有其它的特征值：

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1, \quad Ax = -x$$

上面的答案符合两个关于特征值的性质：

- 1. n×n矩阵有n个特征值。
- 2. 矩阵的所有特征值之和等于该矩阵的主对角线元素之和，这个和数叫做A的迹。

特征方程

现在到了面对Ax=λx的时候，弄清楚如何求解λ和x。

解决的方法是将λx移到等式左侧：

$$Ax - \lambda x = 0$$

更进一步，可以利用λx = λ|x|将λ向量化，变成：

$$(A - \lambda I)x = 0$$

复习一下零空间，对于Ax = 0来说，如果A的各列是线性无关的，意味着方程组只有一个全零解。把这句话放到新方程中，如果(A-λI)的各列是线性无关的，意味着只有一个解，x=0。但是特征向量不能是零向量，所以需要新方程还有其它解，这意味着(A-λI)的各列是线性相关的，即A-λI是一个奇异矩阵。由于奇异矩阵的行列式是0，因此可以得到结论：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

这就没x什么事了，得到了一个关于λ的方程，该方程叫做特征方程或特征值方程。可以根据特征方程先求解出λ，当然，对于n阶方阵会求出n个λ。知道λ后就容易多了，把每个λ代入(A-λI)x=0，然后找出它的零空间。（关于零空间，可参考《线性代数笔记12——列空间和零空间》）

来看一个示例：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

先求解A的特征值：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

A的迹是所有特征值之和，它等于主对角线元素之和，这可以用来作为特征值求解的初步验证。接下来求解每个特征值对应的特征向量：

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 3 - 2 & 1 \\ 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

容易判断零空间的基是：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

这也是特征值 λ_1 对应的特征向量，实际上零空间中的所有向量都是 λ_1 对应的特征向量。

用同样的方法求出 λ_2 对应的特征向量：

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 3 - 4 & 1 \\ 1 & 3 - 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

复数特征值

值得注意的是，特征值未必是实数，比如下面的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

此时特征值是复数， $\lambda = \pm i$

综合示例

召唤一个矩阵A：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

找出A， A^2 ， A^{-1} 的特征值和特征向量。

先看简单的，求解A的特征值比较容易：

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

第一列中有两个0，所以将这个行列式以第一列展开：

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$= (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

三个特征值之和等于A的主对角元素之和。

接下来求解特征值：

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 1-1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-1 & -2 \\ 0 & 1 & 4-1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x = 0$$

方程的一组解就是特征向量：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

接下来求出另外两个特征向量：

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 1-2 & 2 & 3 \\ 0 & 1-2 & -2 \\ 0 & 1 & 4-2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = 0$$

找出对应的零空间，先化简为行阶梯矩阵：

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -2x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

当 $x_3 = 1$ 时，将得到一组特征向量：

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

继续计算 λ_3 的特征向量：

$$(A - \lambda_3 I)x = \begin{bmatrix} 1-3 & 2 & 3 \\ 0 & 1-3 & -2 \\ 0 & 1 & 4-3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 = x_3, \quad x_2 = -x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_3}{2} \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

当 $x_3 = 1$ 时，将得到一组特征向量：

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

接下来计算 A^2 的特征值，这将是浩大的工程，我们更想让它变得容易一点，已知 $Ax = \lambda x$ ，现在将 A 再左乘一个 A 变成 A^2 ：

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^2 x = AAx = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

等式的源头是 $Ax = \lambda x$ ，假设 x 是已知的，它已经被求得，因此这个式子告诉我们，如果已知 A 的特征向量，那么它也是 A^2 的特征向量，只不过特征值换成了 λ^2 。

类似地， $A^{-1}x$ 也可以做一些演变：

$$A^{-1}x = A^{-1} \frac{Ax}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} x$$

A^{-1} 的特征值就是 $1/\lambda$ ，它的特征值和A的特征值相同。

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 特征值, 特征向量

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

2

0

推荐

反对

« 上一篇: 线性代数笔记21——伴随矩阵和克莱姆法则
» 下一篇: 线性代数笔记23——矩阵的对角化和方幂

posted on 2018-12-26 18:53 我是8位的 阅读(9570) 评论(3) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

FinalUI Core

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes